## 2.2 Όρια και συνέχεια

Σε αυτή την ενότητα αναπτύσσουμε τις έννοιες των ανοιχτών συνόλων, των ορίων και της συνέχειας. Τα ανοιχτά σύνολα χρειάζονται για την κατανόηση των ορίων και τα όρια χρειάζονται, με τη σειρά τους, για την κατανόηση της συνέχειας και της παραγωγισιμότητας.

Όπως στον στοιχειώδη απειροστικό λογισμό, δεν είναι απαραίτητο να κατέχει κανείς σε βάθος την έννοια του ορίου προκειμένου να ασχοληθεί με προβλήματα παραγώγισης. Γι' αυτό, κάθε διδάσκων μπορεί να χειριστεί την ύλη που ακολουθεί με διαφορετικό βαθμό αυστηρότητας. Ο φοιτητής θα πρέπει να συμβουλευτεί τον καθηγητή του σχετικά με το βάθος κατανόησης που απαιτείται.

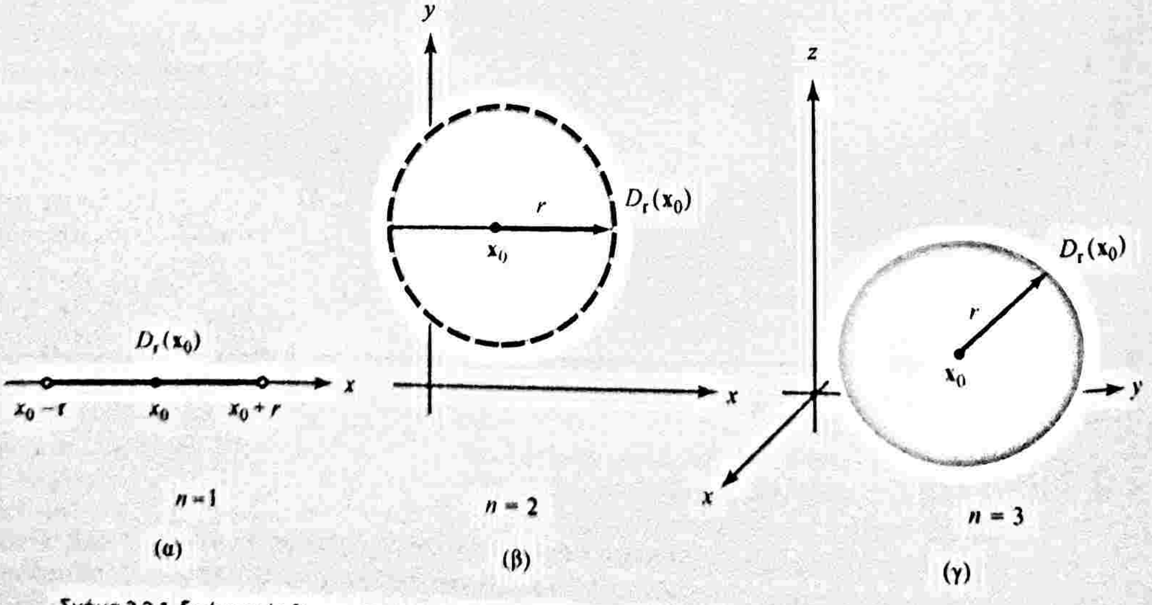
## Ανοιχτά σύνολα

Ξεκινάμε την ανάπτυξη της έννοιας του ανοιχτού συνόλου ορίζοντας τον ανοιχτό δίσκο. Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και έστω $r$ ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Ο ***ανοιχτός δίσκος*** (ή ***ανοιχτή μπάλα***) ακτίνας $r$ με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ ορίζεται ως το σύνολο όλων των σημείων $\mathbf{x}$ για τα οποία $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με $D_r(\mathbf{x}_0)$ και είναι το σύνολο των σημείων $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$ των οποίων η απόσταση από το $\mathbf{x}_0$ είναι μικρότερη από $r$. Προσέξτε ότι περιλαμβάνουμε μόνο τα $\mathbf{x}$ για τα οποία ισχύει η *αυστηρή* ανισότητα. Στο Σχήμα 2.2.1 απεικονίζεται ο δίσκος $D_r(\mathbf{x}_0)$ για $n = 1, 2, 3$. Για την περίπτωση $n = 1$ και $x_0 \in \mathbb{R}$, ο ανοιχτός δίσκος $D_r(x_0)$ είναι το ανοιχτό διάστημα $(x_0 - r, x_0 + r)$, που αποτελείται από όλους τους αριθμούς $x \in \mathbb{R}$ που βρίσκονται *αυστηρά* μεταξύ του $x_0 - r$ και του $x_0 + r$. Για την περίπτωση $n = 2$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, ο $D_r(\mathbf{x}_0)$ είναι το «εσωτερικό» του δίσκου ακτίνας $r$ με κέντρο το $\mathbf{x}_0$. Για την περίπτωση $n = 3$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, ο $D_r(\mathbf{x}_0)$ είναι το τμήμα που βρίσκεται αυστηρά «στο εσωτερικό» της μπάλας ακτίνας $r$ με κέντρο το $\mathbf{x}_0$.

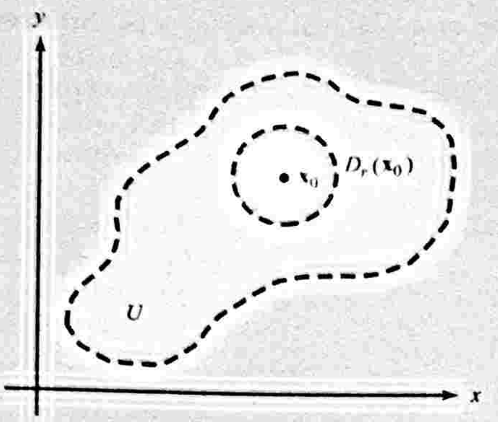
**Ορισμός** Ανοιχτά σύνολα Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ (δηλαδή έστω $U$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$). Λέμε ότι το $U$ είναι ***ανοιχτό σύνολο*** όταν για κάθε σημείο $\mathbf{x}_0$ του $U$ υπάρχει κάποιο $r > 0$ τέτοιο ώστε ο $D_r(\mathbf{x}_0)$ να περιέχεται στο $U$. Με σύμβολα, $D_r(\mathbf{x}_0) \subset U$ (βλ. Σχήμα 2.2.2).

Ο αριθμός $r > 0$ μπορεί να εξαρτάται από το σημείο $\mathbf{x}_0$ και εν γένει το $r$ θα μικραίνει καθώς το $\mathbf{x}_0$ πλησιάζει το «σύνορο» του $U$. Διαισθητικά, ένα σύνολο $U$ είναι ανοιχτό όταν τα «συνοριακά» σημεία του $U$ δεν ανήκουν στο $U$. Στο Σχήμα 2.2.2, η διακεκομμένη γραμμή *δεν* περιλαμβάνεται στο $U$.

Υιοθετούμε τη σύμβαση ότι το κενό σύνολο $\emptyset$ (το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο) είναι ανοιχτό.




Σχήμα 2.2.1 Εικόνα ενός δίσκου $D_r(\mathbf{x}_0)$ (α) στη μία διάσταση, (β) στις δύο και (γ) στις τρεις διαστάσεις.




Σχήμα 2.2.2 Ένα ανοιχτό σύνολο $U$ περιέχει πλήρως κάποιον δίσκο $D_r(\mathbf{x}_0)$ γύρω από κάθε σημείο του $\mathbf{x}_0$.

Έχουμε ορίσει τον ανοιχτό δίσκο και το ανοιχτό σύνολο. Από την επιλογή των όρων φαίνεται πώς ένας ανοιχτός δίσκος πρέπει να είναι και ανοιχτό σύνολο. Με λίγη σκέψη καταλαβαίνουμε ότι αυτό απαιτεί απόδειξη. Το ακόλουθο θεώρημα λέει ακριβώς αυτό.

**Θεώρημα 1** Για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$, το $D_r(\mathbf{x}_0)$ είναι ανοιχτό σύνολο.

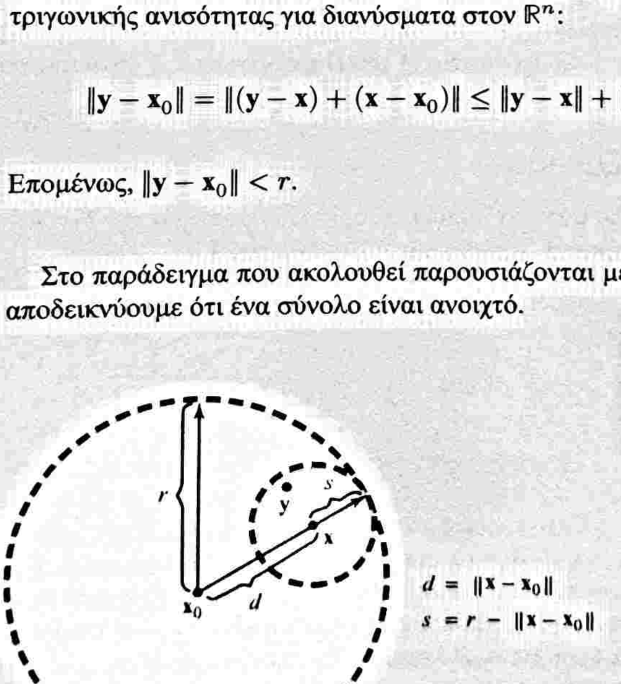
**Απόδειξη** Έστω $\mathbf{x} \in D_r(\mathbf{x}_0)$, δηλαδή έστω $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Σύμφωνα με τον ορισμό του ανοιχτού συνόλου, πρέπει να βρούμε ένα $s > 0$ τέτοιο ώστε $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 2.2.3, το $s = r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ είναι μια εύλογη επιλογή· προσέξτε ότι $s > 0$, αλλά το $s$ μικραίνει αν το $\mathbf{x}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο σύνορο του $D_r(\mathbf{x}_0)$.

Για να αποδείξουμε ότι $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$, έστω $\mathbf{y} \in D_s(\mathbf{x})$, δηλαδή έστω $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < s$. Θέλουμε να αποδείξουμε επίσης ότι $\mathbf{y} \in D_r(\mathbf{x}_0)$. Για να το αποδείξουμε, σύμφωνα με τον ορισμό του $r$-δίσκου, αρκεί να δείξουμε ότι $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r$. Αυτό γίνεται με χρήση της τριγωνικής ανισότητας για διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = \|(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < s + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r.$$

Επομένως, $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r$. ■

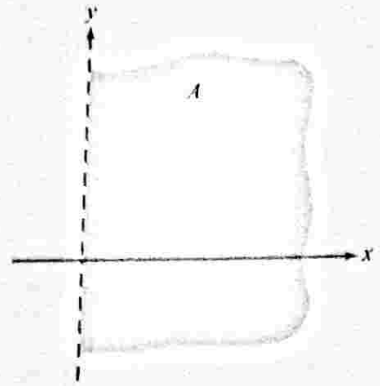
Στο παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζονται μερικές τεχνικές που μας βοηθούν να αποδεικνύουμε ότι ένα σύνολο είναι ανοιχτό.



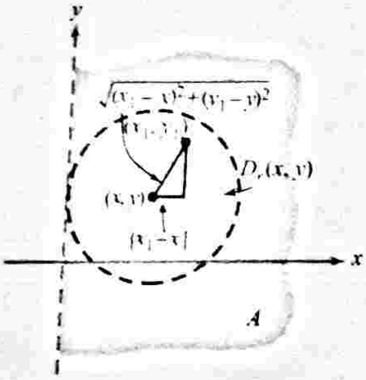

Σχήμα 2.2.3 Η γεωμετρία της απόδειξης ότι ένας ανοιχτός δίσκος είναι ανοιχτό σύνολο.

**Παράδειγμα 1** Αποδείξτε ότι το $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ είναι ανοιχτό σύνολο.

**Λύση** Το σύνολο απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2.4.




Σχήμα 2.2.4 Δείξτε ότι το $A$ είναι ανοιχτό σύνολο.




Σχήμα 2.2.5 Η κατασκευή ενός δίσκου γύρω από ένα σημείο του $A$ που περιέχεται πλήρως στο $A$.

Διαισθητικά, το σύνολο είναι ανοιχτό διότι κανένα σημείο του «συνόρου» $x = 0$ δεν περιέχεται στο σύνολο. Ένας τέτοιος συλλογισμός είναι συνήθως αρκετός μόλις κανείς εξοικειωθεί με την έννοια των ανοιχτών συνόλων. Επειδή όμως βρισκόμαστε στην αρχή, θα πρέπει να δώσουμε τις λεπτομέρειες. Για να αποδείξουμε ότι το $A$ είναι ανοιχτό, θα δείξουμε ότι για κάθε σημείο $(x, y) \in A$ υπάρχει ένα $r > 0$ τέτοιο ώστε $D_r(x, y) \subset A$. Αν $(x, y) \in A$, τότε $x > 0$. Επιλέγουμε $r = x$. Αν $(x_1, y_1) \in D_r(x, y)$, έχουμε

$$|x_1 - x| = \sqrt{(x_1 - x)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x,$$

οπότε $x_1 - x < x$ και $x - x_1 < x$. Από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι $x_1 > 0$, δηλαδή $(x_1, y_1) \in A$. Άρα $D_r(x, y) \subset A$ και συνεπώς το $A$ είναι ανοιχτό (βλ. Σχήμα 2.2.5). ▲

Είναι χρήσιμο να έχουμε ένα ιδιαίτερο όνομα για ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει ένα δεδομένο σημείο $\mathbf{x}$, καθώς αυτή η έννοια εμφανίζεται συχνά στη μελέτη των ορίων και της συνέχειας. Έτσι, λέγοντας ***γειτονιά*** του $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ εννοούμε απλώς ένα ανοιχτό σύνολο $U$ που περιέχει το σημείο $\mathbf{x}$. Για παράδειγμα, το $D_r(\mathbf{x}_0)$ είναι μια γειτονιά του $\mathbf{x}_0$ για οποιοδήποτε $r > 0$. Το σύνολο $A$ του Παραδείγματος 1 είναι μια γειτονιά του σημείου $\mathbf{x}_0 = (3, -10)$.

## Σύνορο

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε αυστηρά την έννοια του συνοριακού σημείου, την οποία χρησιμοποιήσαμε στο Παράδειγμα 1.

> **Ορισμός** Συνοριακά σημεία Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται ***συνοριακό σημείο*** του $A$ αν κάθε γειτονιά του $\mathbf{x}$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο που ανήκει στο $A$ και τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει στο $A$.

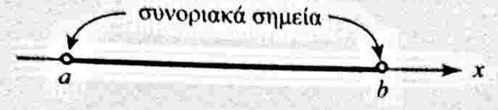
Στον παραπάνω ορισμό, το ίδιο το $\mathbf{x}$ μπορεί είτε να ανήκει είτε να μην ανήκει στο $A$. Αν $\mathbf{x} \in A$, το $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο αν κάθε γειτονιά του $\mathbf{x}$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο που *δεν* ανήκει στο $A$ (περιέχει ήδη ένα σημείο του $A$, συγκεκριμένα, το $\mathbf{x}$). Με αντίστοιχο τρόπο, αν το $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο $A$, είναι συνοριακό σημείο αν κάθε γειτονιά του $\mathbf{x}$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του $A$.

Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα τα συνοριακά σημεία των ανοιχτών συνόλων. Σύμφωνα με τον ορισμό του ανοιχτού συνόλου, κανένα σημείο ενός ανοιχτού συνόλου $A$ δεν μπορεί να είναι συνοριακό σημείο του $A$. Επομένως, *ένα σημείο $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο ενός* *ανοιχτού συνόλου $A$ αν και μόνο αν το $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο $A$ και κάθε γειτονιά του $\mathbf{x}$ έχει μη κενή τομή με το $A$.*

Αυτό εκφράζει με αυστηρό τρόπο τη διαισθητικά προφανή ιδέα ότι ένα συνοριακό σημείο του $A$ είναι ένα σημείο που βρίσκεται ακριβώς πάνω στο «άκρο» του $A$. Σε πολλά παραδείγματα είναι απολύτως προφανές ποια είναι τα συνοριακά σημεία.

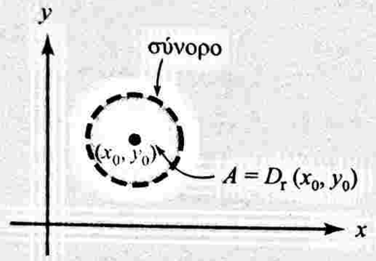
**Παράδειγμα 2**

(α) Έστω $A = (a, b)$ στον $\mathbb{R}$. Τα συνοριακά σημεία του $A$ είναι τα σημεία $a$ και $b$. Σε αυτό καταλήγουμε άμεσα από το Σχήμα 2.2.6 και τον ορισμό. [Η απόδειξη θα ζητηθεί στην Άσκηση 28(γ).]




Σχήμα 2.2.6 Τα συνοριακά σημεία του διαστήματος $(a, b)$.

(β) Έστω $A = D_r(x_0, y_0)$ ένας $r$-δίσκος γύρω από το $(x_0, y_0)$ στο επίπεδο. Το σύνορο αποτελείται από τα σημεία $(x, y)$ με $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (Σχήμα 2.2.7).




Σχήμα 2.2.7 Το σύνορο του $A$ αποτελείται από τα σημεία της περιφέρειας του $A$.

(γ) Έστω $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Το σύνορο του $A$ αποτελείται από όλα τα σημεία του άξονα $y$ (κάντε ένα σχήμα).

(δ) Έστω $A$ ο δίσκος $D_r(\mathbf{x}_0)$ πλην του σημείου $\mathbf{x}_0$ (ένας «τρυπημένος» δίσκος γύρω από το $\mathbf{x}_0$). Το $\mathbf{x}_0$ είναι συνοριακό σημείο του $A$. ▲

## Όρια

Θα στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στην έννοια του ορίου. *Σε όλες τις αναλύσεις που ακολουθούν, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ θα είναι ένα ανοιχτό σύνολο $A$.* Μας ενδιαφέρει να βρούμε το όριο της $f$ καθώς το $\mathbf{x} \in A$ τείνει είτε σε ένα σημείο του $A$ είτε σε κάποιο συνοριακό σημείο του $A$.

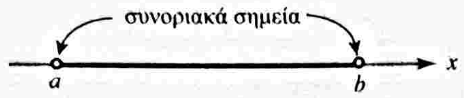
Θα πρέπει να εκτιμήσετε το γεγονός ότι η έννοια του ορίου είναι ένα βασικό και χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση των συναρτήσεων· μας επιτρέπει να μελετάμε τις παραγώγους, και επομένως τα μέγιστα και τα ελάχιστα, τις ασύμπτωτες, τα καταχρηστικά ολοκληρώματα και άλλα σημαντικά γνωρίσματα των συναρτήσεων, ενώ μας είναι επίσης χρήσιμη στις απειροσειρές και στις ακολουθίες. Θα παρουσιάσουμε μια θεωρία ορίων για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών που περιλαμβάνει τη θεωρία για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής ως ειδική περίπτωση.

Στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει συναντήσει την έννοια του $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ για μια συνάρτηση $f\colon\ A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ από ένα υποσύνολο $A$ των πραγματικών αριθμών στους πραγματικούς αριθμούς. Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι καθώς το $x$ πλησιάζει ολοένα και περισσότερο το $x_0$, οι τιμές $f(x)$ πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο την (οριακή τιμή) $l$. Για να θεμελιωθεί αυτή η αφηρημένη περιγραφή σε στέρεη, μαθηματική βάση, χρησιμοποιείται συνήθως είτε η «μέθοδος έψιλον ($\varepsilon$) και δέλτα ($\delta$)» είτε η «μέθοδος της γειτονιάς». Το ίδιο ισχύει για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Ακολούθως θα αναπτύξουμε την προσέγγιση για τα όρια που στηρίζεται στη *ανοιχτού συνόλου A αν και μόνο αν το* $\mathbf{x}$ *δεν ανήκει στο A και κάθε γειτονιά του* $\mathbf{x}$ *έχει μη κενή τομή με το A.*

Αυτό εκφράζει με αυστηρό τρόπο τη διαισθητικά προφανή ιδέα ότι ένα συνοριακό σημείο του $A$ είναι ένα σημείο που βρίσκεται ακριβώς πάνω στο «άκρο» του $A$. Σε πολλά παραδείγματα είναι απολύτως προφανές ποια είναι τα συνοριακά σημεία.

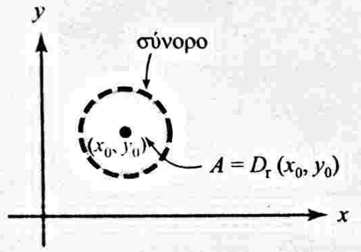
**Παράδειγμα 2**

(α) Έστω $A = (a, b)$ στον $\mathbb{R}$. Τα συνοριακά σημεία του $A$ είναι τα σημεία $a$ και $b$. Σε αυτό καταλήγουμε άμεσα από το Σχήμα 2.2.6 και τον ορισμό. [Η απόδειξη θα ζητηθεί στην Άσκηση 28(γ).]




Σχήμα 2.2.6 Τα συνοριακά σημεία του διαστήματος $(a, b)$.

(β) Έστω $A = D_r(x_0, y_0)$ ένας $r$-δίσκος γύρω από το $(x_0, y_0)$ στο επίπεδο. Το σύνορο αποτελείται από τα σημεία $(x, y)$ με $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (Σχήμα 2.2.7).




Σχήμα 2.2.7 Το σύνορο του $A$ αποτελείται από τα σημεία της περιφέρειας του $A$.

(γ) Έστω $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Το σύνορο του $A$ αποτελείται από όλα τα σημεία του άξονα $y$ (κάντε ένα σχήμα).

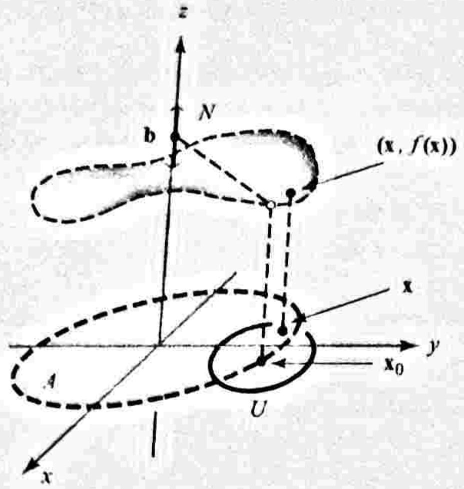
(δ) Έστω $A$ ο δίσκος $D_r(\mathbf{x}_0)$ πλην του σημείου $\mathbf{x}_0$ (ένας «τρυπημένος» δίσκος γύρω από το $\mathbf{x}_0$). Το $\mathbf{x}_0$ είναι συνοριακό σημείο του $A$. ▲

## Όρια

Θα στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στην έννοια του ορίου. *Σε όλες τις αναλύσεις που ακολουθούν, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f θα είναι ένα ανοιχτό σύνολο A.* Μας ενδιαφέρει να βρούμε το όριο της $f$ καθώς το $\mathbf{x} \in A$ τείνει είτε σε ένα σημείο του $A$ είτε σε κάποιο συνοριακό σημείο του $A$.

Θα πρέπει να εκτιμήσετε το γεγονός ότι η έννοια του ορίου είναι ένα βασικό και χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση των συναρτήσεων· μας επιτρέπει να μελετάμε τις παραγώγους, και επομένως τα μέγιστα και τα ελάχιστα, τις ασύμπτωτες, τα καταχρηστικά ολοκληρώματα και άλλα σημαντικά γνωρίσματα των συναρτήσεων, ενώ μας είναι επίσης χρήσιμη στις απειροσειρές και στις ακολουθίες. Θα παρουσιάσουμε μια θεωρία ορίων για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών που περιλαμβάνει τη θεωρία για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής ως ειδική περίπτωση.

Στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει συναντήσει την έννοια του $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ για μια συνάρτηση $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ από ένα υποσύνολο $A$ των πραγματικών αριθμών στους πραγματικούς αριθμούς. Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι καθώς το $x$ πλησιάζει ολοένα και περισσότερο το $x_0$, οι τιμές $f(x)$ πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο την (οριακή τιμή) $l$. Για να θεμελιωθεί αυτή η αφηρημένη περιγραφή σε στέρεη, μαθηματική βάση, χρησιμοποιείται συνήθως είτε η «μέθοδος έψιλον ($\varepsilon$) και δέλτα ($\delta$)» είτε η «μέθοδος της γειτονιάς». Το ίδιο ισχύει για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Ακολούθως θα αναπτύξουμε την προσέγγιση για τα όρια που στηρίζεται στη




Σχήμα 2.2.8 Τα όρια με χρήση γειτονιών. Αν το $\mathbf{x}$ ανήκει στο $U$, τότε το $f(\mathbf{x})$ θα ανήκει στο $N$. (Ο μικρός ανοιχτός κύκλος δηλώνει ότι το συγκεκριμένο σημείο δεν ανήκει στο γράφημα.) Στο σχήμα, $f\colon A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \to \mathbb{R}$. (Η διακεκομμένη γραμμή δεν ανήκει στο γράφημα της $f$.)

μέθοδο της γειτονιάς. Αφήνουμε την προσέγγιση έψιλον-δέλτα για προαιρετική μελέτη στο τέλος αυτής της ενότητας.

**Ορισμός** Όριο Έστω $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, όπου $A$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Έστω ότι το $\mathbf{x}_0$ ανήκει στο $A$ ή είναι συνοριακό σημείο του $A$ και έστω $N$ μια γειτονιά του $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η $f$ είναι ***τελικά στο $N$ καθώς το $\mathbf{x}$ τείνει*** στο $\mathbf{x}_0$, αν υπάρχει μια γειτονιά $U$ του $\mathbf{x}_0$ τέτοια ώστε για $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \in U$ και $\mathbf{x} \in A$ να έχουμε $f(\mathbf{x}) \in N$. [Η γεωμετρική σημασία αυτής της πρότασης παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.2.8. Προσέξτε ότι το $\mathbf{x}_0$ δεν χρειάζεται να ανήκει στο σύνολο $A$, άρα το $f(\mathbf{x}_0)$ δεν ορίζεται απαραίτητα.] Λέμε ότι η $f(\mathbf{x})$ ***τείνει*** στο $\mathbf{b}$ καθώς το $\mathbf{x}$ τείνει στο $\mathbf{x}_0$ ή, με σύμβολα,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \qquad \text{ή} \qquad f(\mathbf{x}) \to \mathbf{b} \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0,$$

όταν, δεδομένης *οποιασδήποτε* γειτονιάς $N$ του $\mathbf{b}$, η $f$ είναι τελικά στο $N$ καθώς το $\mathbf{x}$ τείνει στο $\mathbf{x}_0$ [δηλαδή «το $f(\mathbf{x})$ είναι κοντά στο $\mathbf{b}$ αν το $\mathbf{x}$ είναι κοντά στο $\mathbf{x}_0$»]. Μπορεί, καθώς το $\mathbf{x}$ τείνει στο $\mathbf{x}_0$, οι τιμές $f(\mathbf{x})$ να μην πλησιάζουν κανένα συγκεκριμένο διάνυσμα. Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι το $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ ***δεν υπάρχει.***

Στο εξής, όποτε αναφερόμαστε σε κάποιο $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, θα θεωρούμε πάντα ότι το $\mathbf{x}_0$ ανήκει είτε σε κάποιο ανοιχτό σύνολο στο οποίο ορίζεται η $f$ είτε στο σύνορο ενός τέτοιου συνόλου.

Ένας λόγος για τον οποίο επιμένουμε να ισχύει $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ στον ορισμό του ορίου γίνεται φανερός αν θυμηθούμε από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής ότι θέλουμε να μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης $f$ σε ένα σημείο $x_0$ μέσω της έκφρασης

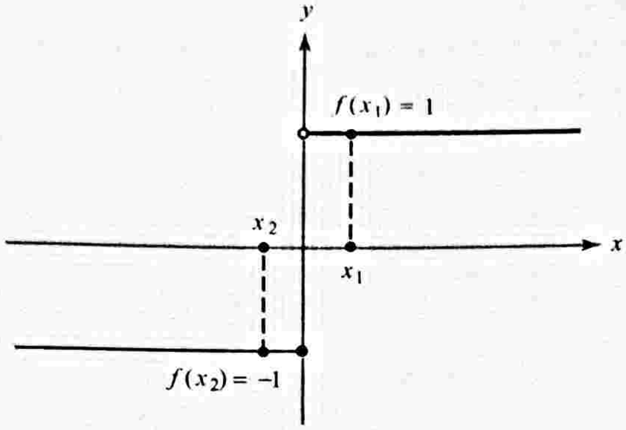
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

η οποία δεν ορίζεται για $x = x_0$.

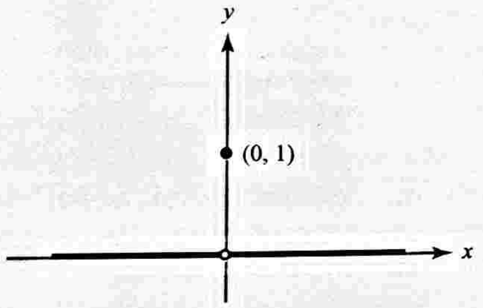
**Παράδειγμα 3** (α) Αυτό το παράδειγμα αφορά ένα όριο το οποίο δεν υπάρχει. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x > 0 \\ -1 & \text{αν } x \le 0. \end{cases}$$

Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει, αφού υπάρχουν σημεία $x_1$ οσοδήποτε κοντά στο 0 με $f(x_1) = 1$ και επίσης σημεία $x_2$ οσοδήποτε κοντά στο 0 με $f(x_2) = -1$, δηλαδή δεν υπάρχει κάποιος μοναδικός αριθμός στον οποίο να είναι κοντά η $f$ όταν το $x$ είναι κοντά στο 0 (βλ. Σχήμα 2.2.9). Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $f$ στο $(0, 1)$ ή στο $(-1, 0)$, τότε το όριο υπάρχει. Αντιλαμβάνεστε γιατί;




Σχήμα 2.2.9 Το όριο αυτής της συνάρτησης καθώς $x \to 0$ δεν υπάρχει.




Σχήμα 2.2.10 Το όριο αυτής της συνάρτησης καθώς $x \to 0$ είναι μηδέν.

(β) Αυτό το παράδειγμα αφορά μια συνάρτηση της οποίας το όριο υπάρχει, αλλά η οριακή τιμή δεν ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο οριακό σημείο. Ορίζουμε την $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

Έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, αφού για κάθε γειτονιά $U$ του 0, αν $x \in U$ και $x \neq 0$, τότε $f(x) = 0$. Από το γράφημα του Σχήματος 2.2.10 βλέπουμε ότι η $f$ τείνει στο 0 καθώς $x \to 0$· δεν μας απασχολεί το γεγονός ότι η $f$ τυχαίνει να παίρνει άλλη τιμή στο 0. ▲

**Παράδειγμα 4** Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, επαληθεύστε το «προφανές» $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, όπου $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

**Λύση** Έστω $f$ η συνάρτηση που ορίζεται από την $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ και έστω $N$ οποιαδήποτε γειτονιά του $\mathbf{x}_0$. Πρέπει να δείξουμε ότι η $f(\mathbf{x})$ είναι τελικά στο $N$ καθώς $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Σύμφωνα με τον ορισμό, πρέπει να βρούμε μια γειτονιά $U$ του $\mathbf{x}_0$ με την ιδιότητα ότι αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και $\mathbf{x} \in U$, τότε $f(\mathbf{x}) \in N$. Επιλέγουμε $U = N$. Αν $\mathbf{x} \in U$, τότε $\mathbf{x} \in N$. Επειδή $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, έπεται ότι $f(\mathbf{x}) \in N$. Άρα έχουμε δείξει ότι $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Με αντίστοιχο τρόπο,

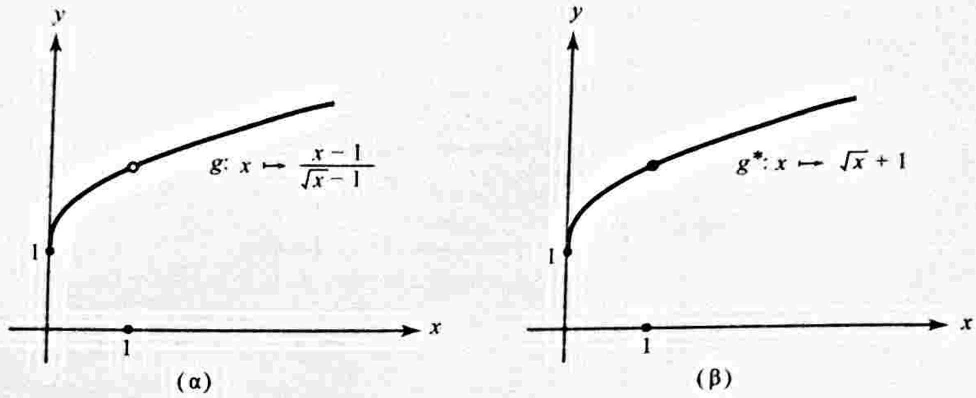
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0, \qquad \text{κ.λπ.}$$ ▲

Στα επόμενα, θα θεωρήσουμε δεδομένα, χωρίς απόδειξη, τα όρια των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Για παράδειγμα, θα χρησιμοποιήσουμε τα $\lim_{x\to 1}\sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ και $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = \sin 0 = 0$.

**Παράδειγμα 5** (Αυτό το παράδειγμα καταδεικνύει μία ακόμη περίπτωση όπου δεν μπορούμε «να μαντέψουμε» το όριο κοιτώντας απλώς τη συνάρτηση.) Βρείτε το $\lim_{x\to 1} g(x)$ όπου

$$g: x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$$

**Λύση** Το γράφημα αυτής της συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 2.2.11(α).




Σχήμα 2.2.11 Τα δύο γραφήματα είναι ίδια με τη μόνη διαφορά ότι στο (α) η $g$ δεν ορίζεται για $x = 1$, ενώ στο (β) η $g^*$ ορίζεται για κάθε $x \geq 0$.

Παρατηρούμε ότι το $g(1)$ δεν ορίζεται, διότι η διαίρεση με το μηδέν δεν ορίζεται. Ωστόσο, αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρανομαστή της $g(x)$ με $\sqrt{x}+1$, βρίσκουμε ότι για κάθε $x$ στο πεδίο ορισμού της $g$ έχουμε

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1, \qquad x \neq 1.$$

Η έκφραση $g^*(x) = \sqrt{x}+1$ ορίζεται, και για $x = 1$ έχει τιμή 2. Από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, $g^*(x) \to 2$ καθώς $x \to 1$. Επειδή όμως $g^*(x) = g(x)$ για κάθε $x \geq 0$, $x \neq 1$, πρέπει να έχουμε επίσης $g(x) \to 2$ καθώς $x \to 1$. ▲

Σε λίγο θα δούμε και άλλα παραδείγματα με συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

## Ιδιότητες των ορίων

Για να μπορούμε να μιλάμε για *το* όριο, πρέπει να αποδείξουμε ότι η $f$ μπορεί να έχει *το πολύ ένα* όριο καθώς $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Διατυπώνουμε τώρα αυστηρά αυτό το διαισθητικά προφανές γεγονός. (Βλ. το διαδικτυακό συμπλήρωμα για την απόδειξη.)

**Θεώρημα 2** Μοναδικότητα των ορίων

Αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, τότε $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$.

Για να κάνουμε υπολογισμούς με τα όρια στην πράξη, χρειαζόμαστε κάποιους κανόνες για τα όρια· για παράδειγμα, ότι το όριο ενός αθροίσματος είναι το άθροισμα των ορίων. Αυτοί οι κανόνες συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα (βλ. το διαδικτυακό συμπλήρωμα του Κεφαλαίου 2 για την απόδειξη).

**Θεώρημα 3** Ιδιότητες των ορίων Έστω $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Αν το $\mathbf{x}_0$ ανήκει στο $A$ ή είναι συνοριακό σημείο του $A$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε

(i) Αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$, όπου η $cf\colon A \to \mathbb{R}^m$ ορίζεται από την $\mathbf{x} \mapsto c(f(\mathbf{x}))$.

(ii) Αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, όπου η $(f+g)\colon A \to \mathbb{R}^m$ ορίζεται από την $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

(iii) Αν $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b_1$ και $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = b_2$, τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (fg)(\mathbf{x}) = b_1 b_2$, όπου η $(fg)\colon A \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$.

(iv) Αν $m = 1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b \neq 0$ και $f(\mathbf{x}) \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in A$, τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} 1/f(\mathbf{x}) = 1/b$, όπου η $1/f\colon A \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την $\mathbf{x} \mapsto 1/f(\mathbf{x})$.

(v) Αν $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, όπου $f_i\colon A \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις της $f$, τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ αν και μόνο αν $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$.

Αυτά τα αποτελέσματα θα πρέπει να είναι διαισθητικά προφανή. Για παράδειγμα, η ιδιότητα (ii) λέει ότι αν το $f(\mathbf{x})$ είναι κοντά στο $\mathbf{b}_1$ και το $g(\mathbf{x})$ είναι κοντά στο $\mathbf{b}_2$ όταν το $\mathbf{x}$ είναι κοντά στο $\mathbf{x}_0$, τότε το $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ είναι κοντά στο $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ όταν το $\mathbf{x}$ είναι κοντά στο $\mathbf{x}_0$. Μια εφαρμογή του κανόνα φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

**Παράδειγμα 6** Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y).$$

**Λύση** Η $f$ είναι το άθροισμα των τριών συναρτήσεων $(x, y) \mapsto x^2$, $(x, y) \mapsto y^2$ και $(x, y) \mapsto 2$. Το όριο του αθροίσματος είναι το άθροισμα των ορίων και το όριο του γινομένου είναι το γινόμενο των ορίων (Θεώρ. 3). Άρα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$ (Παράδειγμα 4), έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2 = \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x\right) = x_0^2$$

και, ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y^2 = y_0^2$. Συνεπώς,

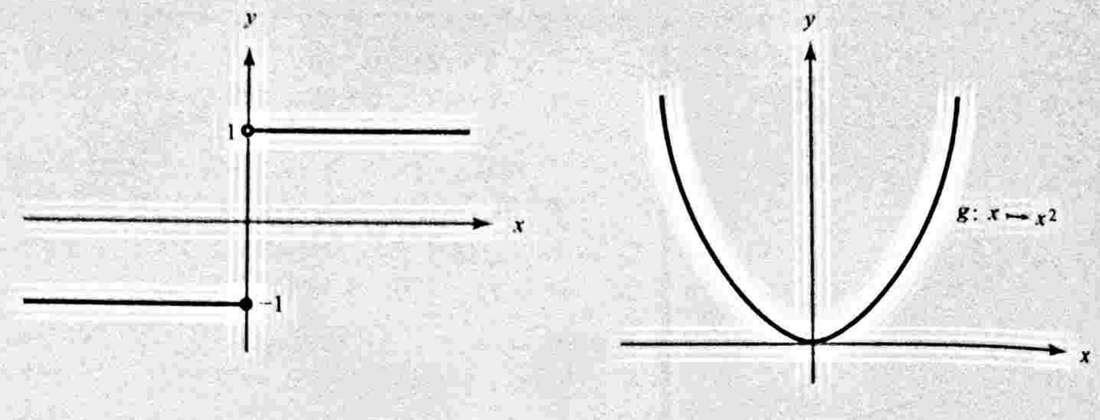
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y) = 0^2 + 1^2 + 2 = 3.$$

▲

## Συνεχείς συναρτήσεις

Στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής μαθαίνει κανείς ότι η έννοια της συνεχούς συνάρτησης στηρίζεται διαισθητικά στην εικόνα μιας συνάρτησης της οποίας το γράφημα είναι μια καμπύλη που δεν διακόπτεται, δηλαδή μια καμπύλη που δεν παρουσιάζει άλματα, ή με άλλα λόγια το είδος της καμπύλης που διαγράφει ένα κινούμενο σωματίδιο ή η μύτη ενός μολυβιού που κινείται χωρίς να σηκώνεται από το χαρτί.

Για να μπορούμε να αναλύσουμε λεπτομερώς τις συναρτήσεις, χρειαζόμαστε ακριβέστερες έννοιες από αυτή την αόριστη περιγραφή. Ένα παράδειγμα ίσως μας βοηθήσει να διασαφηνίσουμε τα πράγματα. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από




(α) (β)

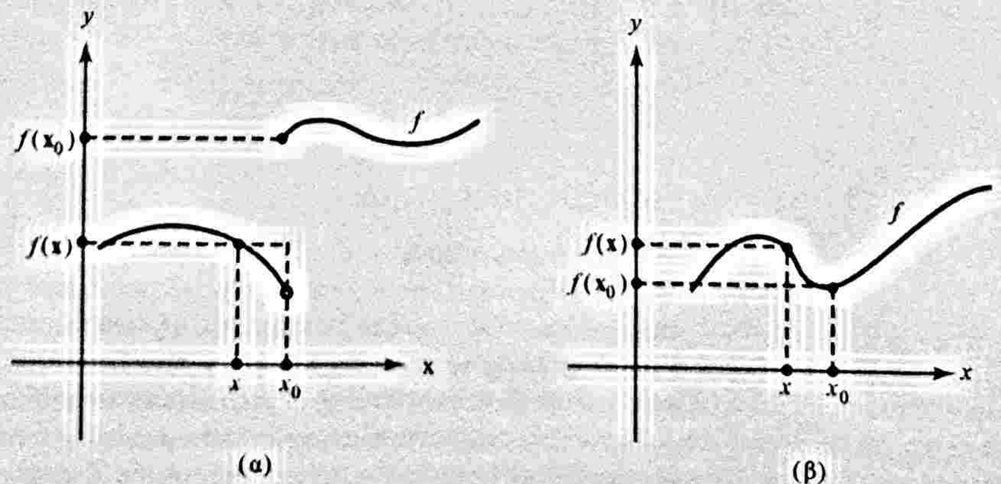
Σχήμα 2.2.12 Η συνάρτηση $f$ (α) δεν είναι συνεχής διότι η τιμή της πραγματοποιεί άλμα όταν το $x$ διέρχεται από το 0. Η συνάρτηση $g$ (β) είναι συνεχής.

την $f(x) = -1$ αν $x \leq 0$ και $f(x) = 1$ αν $x > 0$. Το γράφημα της $f$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.2.12(α). [Ο μικρός ανοιχτός κύκλος δηλώνει ότι το σημείο $(0, 1)$ *δεν* ανήκει στο γράφημα της $f$.] Είναι φανερό ότι το γράφημα της $f$ διακόπτεται στο σημείο $x = 0$. Ας θεωρήσουμε επίσης τη συνάρτηση $g\colon x \mapsto x^2$. Αυτή η συνάρτηση αναπαριστάται γραφικά στο Σχήμα 2.2.12(β). Το γράφημα της $g$ δεν διακόπτεται σε κανένα σημείο.

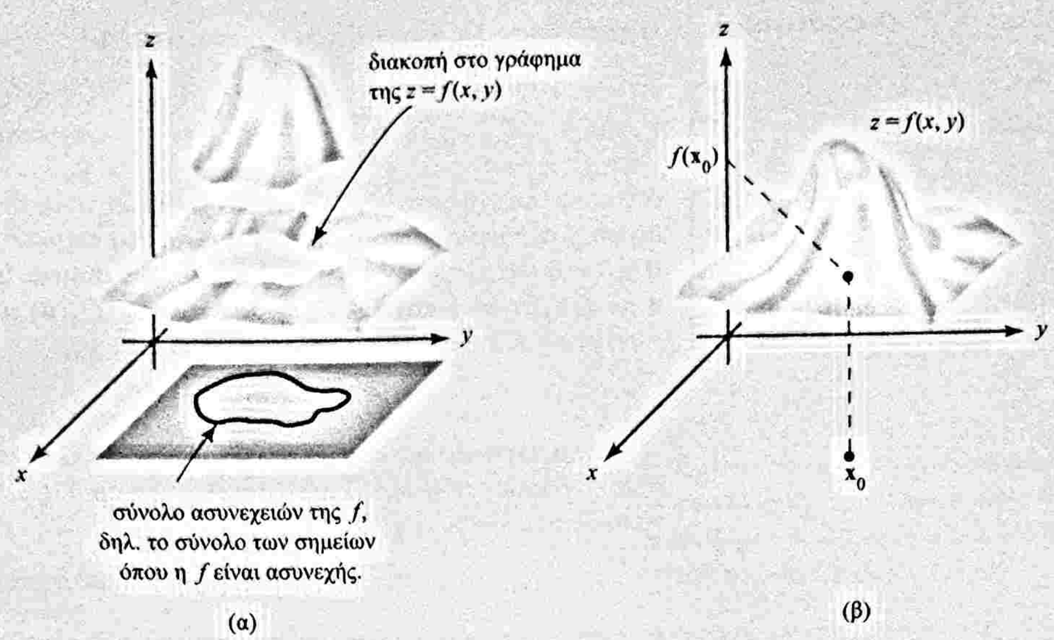
Αν εξετάσουμε παραδείγματα συναρτήσεων σαν την $f$, τα γραφήματα των οποίων διακόπτονται σε κάποιο σημείο $x_0$, και συναρτήσεων σαν την $g$, τα γραφήματα των οποίων δεν διακόπτονται, παρατηρούμε ότι η βασική τους διαφορά είναι ότι για τις συναρτήσεις σαν την $g$, οι τιμές $g(x)$ πλησιάζουν το $g(x_0)$ καθώς το $x$ πλησιάζει ολοένα και περισσότερο το $x_0$. Η ίδια ιδέα μπορεί να εφαρμοστεί και στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Επειδή όμως η έννοια του «πλησιάζει ολοένα και περισσότερο» δεν συνιστά μαθηματικό ορισμό, θα διατυπώσουμε με ακρίβεια αυτές τις έννοιες χρησιμοποιώντας όρια.

Επειδή η συνθήκη $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ σημαίνει ότι το $f(\mathbf{x})$ είναι κοντά στο $f(\mathbf{x}_0)$ όταν το $\mathbf{x}$ είναι κοντά στο $\mathbf{x}_0$, η οριακή αυτή συνθήκη ανταποκρίνεται πράγματι στην απαίτηση να μην διακόπτεται το γράφημα της $f$ (βλ. Σχήμα 2.2.13, όπου παρουσιάζεται η περίπτωση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Στην περίπτωση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, ευκολότερη είναι η οπτικοποίηση των πραγματικών συναρτήσεων, φερ' ειπείν $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να οπτικοποιήσουμε την $f$ σχεδιάζοντας το γράφημά της, το οποίο αποτελείται από όλα τα σημεία $(x, y, z)$ του $\mathbb{R}^3$ με $z = f(x, y)$. Άρα η συνέχεια της $f$ σημαίνει ότι το γράφημά της δεν παρουσιάζει «διακοπές» (βλ. Σχήμα 2.2.14).

Σχήμα 2.2.13 (α) Ασυνεχής συνάρτηση για την οποία δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$. (β) Συνεχής συνάρτηση για την οποία αυτό το όριο υπάρχει και ισούται με $f(x_0)$.




(α) (β)




Σχήμα 2.2.14 (α) Μια ασυνεχής συνάρτηση δύο μεταβλητών. (β) Μια συνεχής συνάρτηση.

**Ορισμός** Συνέχεια Έστω $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A$ και έστω $\mathbf{x}_0 \in A$. Λέμε ότι η $f$ είναι ***συνεχής*** στο $\mathbf{x}_0$ αν και μόνο αν

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Λέγοντας απλώς ότι η $f$ είναι ***συνεχής***, θα εννοούμε ότι η $f$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\mathbf{x}_0$ του $A$. Αν η $f$ δεν είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$, λέμε ότι η $f$ είναι ***ασυνεχής*** στο $\mathbf{x}_0$. Αν η $f$ είναι ασυνεχής σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, λέμε ότι η $f$ είναι ***ασυνεχής***.

**Παράδειγμα 7** Κάθε πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ είναι συνεχής συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, σύμφωνα με το Θεώρημα 3 και το Παράδειγμα 4,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\right) &= \lim_{x\to x_0} a_0 + \lim_{x\to x_0} a_1x + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_nx^n \\ &= a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n,\end{aligned}$$

διότι το όριο του γινομένου είναι το γινόμενο των ορίων, άρα

$$\lim_{x\to x_0} x^n = \left(\lim_{x\to x_0} x\right)^n = x_0^n.$$ ▲

**Παράδειγμα 8** Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$. Η $f$ είναι συνεχής, διότι, σύμφωνα με τα θεωρήματα σχετικά με τα όρια και το Παράδειγμα 4,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} xy = \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y\right) = x_0y_0.$$ ▲

Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο διαπιστώνουμε ότι οποιοδήποτε πολυώνυμο $p(x,y)$ [για παράδειγμα, το $p(x,y) = 3x^2 - 6xy^2 + y^3$] ως προς $x$ και $y$ είναι συνεχής συνάρτηση.

**Παράδειγμα 9** Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \leq 0 \text{ ή } y \leq 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ ή σε οποιοδήποτε σημείο του θετικού άξονα $x$ ή του θετικού άξονα $y$. Πράγματι, αν $(x_0, y_0) = \mathbf{u}$ είναι ένα τέτοιο σημείο (δηλαδή $x_0 = 0$ και $y_0 \geq 0$, ή $y_0 = 0$ και $x_0 \geq 0$) και $\delta > 0$, υπάρχουν σημεία $(x,y) \in D_\delta(\mathbf{u})$ σε μια γειτονιά του $\mathbf{u}$ με $f(x,y) = 1$ και άλλα σημεία $(x,y) \in D_\delta(\mathbf{u})$ με $f(x,y) = 0$. Άρα *δεν* ισχύει ότι $f(x,y) \to f(x_0,y_0) = 1$ καθώς $(x,y) \to (x_0,y_0)$. ▲

Για να αποδείξουμε ότι μια συγκεκριμένη συνάρτηση είναι συνεχής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα σχετικά με τα όρια (βλ. Θεώρημα 3 και Παράδειγμα 7). Αν τα αναδιατυπώσουμε χρησιμοποιώντας τη συνέχεια, καταλήγουμε στο εξής:

**Θεώρημα 4** Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων Έστω οι $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, και έστω $c$ πραγματικός αριθμός.

(i) Αν η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$, το ίδιο ισχύει για την $cf$, όπου $(cf)(\mathbf{x}) = c[f(\mathbf{x})]$.

(ii) Αν οι $f$ και $g$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$, το ίδιο ισχύει για την $f+g$, όπου το άθροισμα των $f$ και $g$ ορίζεται από την $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

(iii) Αν οι $f$ και $g$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$ και $m = 1$, τότε το γινόμενο $fg$ που ορίζεται από την $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ είναι συνεχές στο $\mathbf{x}_0$.

(iv) Αν η $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ και δεν μηδενίζεται πουθενά στο $A$, τότε η συνάρτηση πηλίκο $1/f$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$, όπου $(1/f)(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$.

(v) Αν $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, τότε η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ αν και μόνο αν καθεμία από τις πραγματικές συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

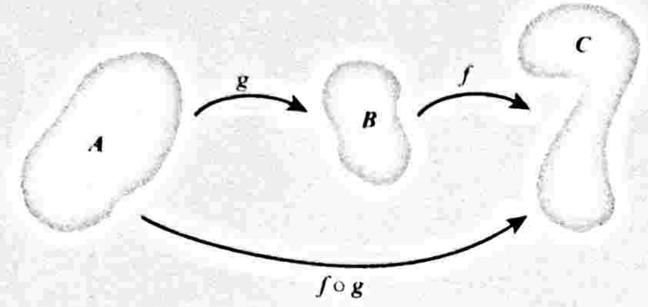
Συχνά χρησιμοποιείται μια παραλλαγή της ιδιότητας (iv): Αν $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ και η $f$ είναι συνεχής, τότε $f(\mathbf{x}) \neq 0$ σε μια γειτονιά του $\mathbf{x}_0$, οπότε η $1/f$ ορίζεται σε αυτή τη γειτονιά και η $1/f$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

**Παράδειγμα 10** Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2y, (y+x^3)/(1+x^2))$. Δείξτε ότι η $f$ είναι συνεχής.

**Λύση** Για να το δείξουμε, αρκεί, με βάση την ιδιότητα (v) του Θεωρήματος 4, να δείξουμε ότι κάθε συνιστώσα είναι συνεχής. Όπως έχουμε αναφέρει, κάθε πολυώνυμο δύο μεταβλητών είναι συνεχής συνάρτηση. Επομένως, η απεικόνιση $(x,y) \mapsto x^2y$ είναι συνεχής.

Επειδή η $1 + x^2$ είναι συνεχής και μη μηδενική, από την ιδιότητα (iv) προκύπτει ότι η $1/(1+x^2)$ είναι συνεχής. Επομένως, η $(y+x^3)/(1+x^2)$ είναι γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και σύμφωνα με την ιδιότητα (iii) είναι συνεχής. ▲

Αντίστοιχους συλλογισμούς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για συναρτήσεις σαν την $\mathbf{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ που δίνεται από την $\mathbf{c}(t) = (t^2, 1, t^3/(1+t^2))$ και να δείξουμε ότι είναι και αυτές συνεχείς.




Σχήμα 2.2.15 Η σύνθεση της $g$ με την $f$.

## Σύνθεση

Θα εξετάσουμε τώρα τη *σύνθεση*, μια ακόμη βασική πράξη των συναρτήσεων. Αν η $g$ απεικονίζει το $A$ στο $B$ και η $f$ απεικονίζει το $B$ στο $C$, η ***σύνθεση της $g$ με την $f$***, που συμβολίζεται με $f \circ g$, απεικονίζει το $A$ στο $C$ ως εξής: $\mathbf{x} \mapsto f(g(\mathbf{x}))$ (βλ. Σχήμα 2.2.15). Για παράδειγμα, η $\sin(x^2)$ είναι η σύνθεση της $x \mapsto x^2$ με την $y \mapsto \sin y$.

**Θεώρημα** 5 Συνέχεια της σύνθεσης Έστω $g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $f\colon B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Έστω ότι $g(A) \subset B$, έτσι ώστε η $f \circ g$ να ορίζεται στο $A$. Αν η $g$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0 \in A$ και η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$, τότε η $f \circ g$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

Η ιδέα στην οποία στηρίζεται το παραπάνω θεώρημα είναι απλή· η αυστηρή απόδειξη που περιλαμβάνεται στο διαδικτυακό συμπλήρωμα ακολουθεί παρόμοια λογική. Διαισθητικά, πρέπει να δείξουμε ότι καθώς το $\mathbf{x}$ πλησιάζει το $\mathbf{x}_0$, το $f(g(\mathbf{x}))$ πλησιάζει το $f(g(\mathbf{x}_0))$. Καθώς όμως το $\mathbf{x}$ πλησιάζει το $\mathbf{x}_0$, το $g(\mathbf{x})$ πλησιάζει το $g(\mathbf{x}_0)$ (λόγω της συνέχειας της $g$ στο $\mathbf{x}_0$), και καθώς το $g(\mathbf{x})$ πλησιάζει το $g(\mathbf{x}_0)$, το $f(g(\mathbf{x}))$ πλησιάζει το $f(g(\mathbf{x}_0))$ [λόγω της συνέχειας της $f$ στο $g(\mathbf{x}_0)$].

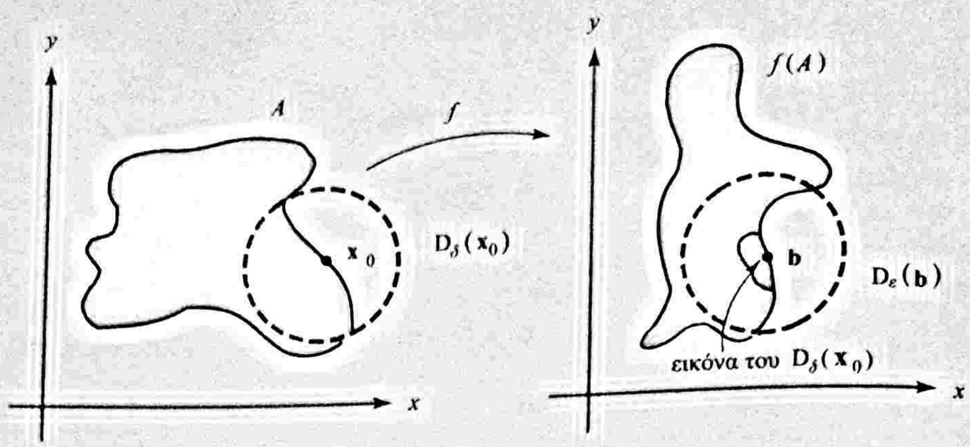
**Παράδειγμα 11** Έστω $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{30} + \sin z^3$. Δείξτε ότι $f$ είναι συνεχής.

**Λύση** Μπορούμε να γράψουμε την $f$ ως άθροισμα των δύο συναρτήσεων $(x^2 + y^2 + z^2)^{30}$ και $\sin z^3$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι καθεμία από αυτές είναι συνεχής. Η πρώτη είναι η σύνθεση της $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)$ με την $u \mapsto u^{30}$, ενώ η δεύτερη η σύνθεση της $(x, y, z) \mapsto z^3$ με την $u \mapsto \sin u$. Η συνέχεια έπεται από το Θεώρημα 5. ▲

## Όρια με χρήση των $\varepsilon$ και $\delta$

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε ένα θεώρημα (που αποδεικνύεται στο διαδικτυακό συμπλήρωμα του Κεφαλαίου 2) που αποτελεί μια χρήσιμη διατύπωση της έννοιας του ορίου με βάση τα $\varepsilon$ και $\delta$, η οποία συχνά χρησιμοποιείται ως ο *ορισμός* του ορίου. Πρόκειται, στην πραγματικότητα, για έναν άλλον τρόπο να διατυπωθεί αυστηρά η διαισθητικά απλή πρόταση ότι «το $f(\mathbf{x})$ είναι κοντά στο $\mathbf{b}$ όταν το $\mathbf{x}$ είναι κοντά στο $\mathbf{x}_0$». Για να καταλάβει ευκολότερα αυτή τη διατύπωση, ο αναγνώστης θα πρέπει να τη μελετήσει σε συνδυασμό με τα παραδείγματα που έχουμε ήδη παρουσιάσει.

**Θεώρημα 6** Έστω $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Αν το $\mathbf{x}_0$ ανήκει στο $A$ ή είναι συνοριακό σημείο του $A$, τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ αν και μόνο αν για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in A$ που ικανοποιεί την $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να έχουμε $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$ (βλ. Σχήμα 2.2.16).




Σχήμα 2.2.16 Η γεωμετρία του ορισμού του ορίου με βάση τα $\varepsilon$ και $\delta$.

Για να δείξουμε πώς χρησιμοποιείται η τεχνική $\varepsilon$-$\delta$ του Θεωρήματος 6, παρουσιάζουμε τα ακόλουθα παραδείγματα.

**Παράδειγμα 12** Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο $\varepsilon$-$\delta$.

**Λύση** Προσέξτε ότι αν $\delta > 0$, από την $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ έπεται ότι $|x-0| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta$. Επομένως, αν $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$, τότε το $|x-0|$ είναι επίσης μικρότερο από $\delta$. Για δεδομένο $\varepsilon > 0$, πρέπει να βρούμε ένα $\delta > 0$ (εν γένει εξαρτώμενο από το $\varepsilon$) με την ιδιότητα ότι αν $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ τότε $|x-0| < \varepsilon$. Τι επιλέγουμε ως $\delta$; Από τον παραπάνω υπολογισμό βλέπουμε ότι αν επιλέξουμε $\delta = \varepsilon$, από την $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ έπεται ότι $|x-0| < \varepsilon$. Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Για δεδομένο $\varepsilon > 0$, θα μπορούσαμε να είχαμε επίσης επιλέξει $\delta = \varepsilon/2$ ή $\varepsilon/3$, αλλά αρκεί να βρούμε ένα μόνο $\delta$ που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις του ορισμού του ορίου. ▲

**Παράδειγμα 13** Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Μολονότι η $f$ δεν ορίζεται στο $(0,0)$, εξετάστε αν η $f(x,y)$ τείνει σε κάποιον αριθμό καθώς το $(x,y)$ τείνει στο $(0,0)$.

**Λύση** Από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής ή τον κανόνα του L'Hôpital γνωρίζουμε ότι

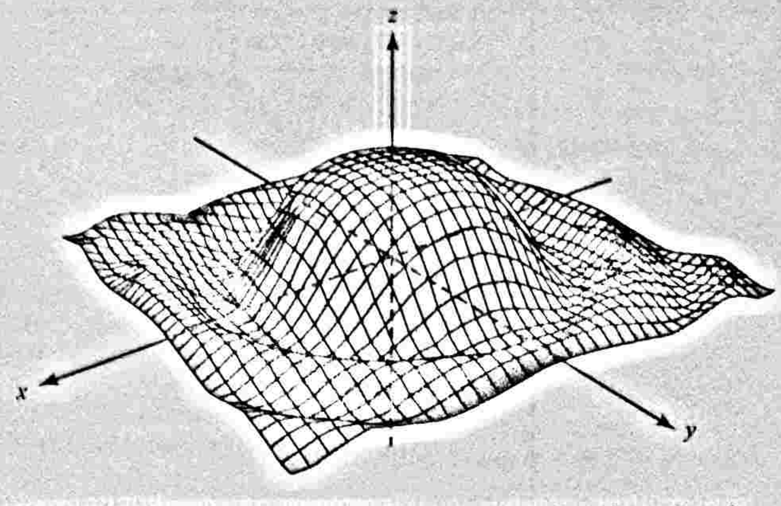
$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Επομένως, είναι εύλογο να εικάσουμε ότι

$$\lim_{\mathbf{v}\to(0,0)} f(\mathbf{v}) = \lim_{\mathbf{v}\to(0,0)} \frac{\sin\|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} = 1.$$

Πράγματι, επειδή $\lim_{\alpha\to 0}(\sin\alpha)/\alpha = 1$, για δεδομένο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ένα $\delta > 0$, με $0 < \delta < 1$, τέτοιο ώστε αν $0 < |\alpha| < \delta$ να έχουμε $|(\sin\alpha)/\alpha - 1| < \varepsilon$. Αν $0 < \|\mathbf{v}\| < \delta$, τότε $0 < \|\mathbf{v}\|^2 < \delta^2 < \delta$, συνεπώς

$$|f(\mathbf{v}) - 1| = \left|\frac{\sin\|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} - 1\right| < \varepsilon.$$




Σχήμα 2.2.17 Γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = [\sin(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$.

Άρα $\lim_{\mathbf{v}\to(0,0)} f(\mathbf{v}) = 1$. Αν σχεδιάσουμε την $[\sin(x^2+y^2)]/(x^2+y^2)$ σε έναν υπολογιστή παίρνουμε ένα γράφημα που έχει πράγματι καλή συμπεριφορά κοντά στο $(0,0)$ (Σχήμα 2.2.17). ▲

**Παράδειγμα 14** Δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

**Λύση** Πρέπει να δείξουμε ότι το $x^2/\sqrt{x^2+y^2}$ είναι μικρό όταν το $(x,y)$ είναι κοντά στην αρχή των αξόνων. Για να το αποδείξουμε, χρησιμοποιούμε την εξής ανισότητα:

$$0 \le \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (\text{επειδή } y^2 \ge 0)$$
$$= \sqrt{x^2+y^2}.$$

Για δεδομένο $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta = \varepsilon$. Έτσι, $\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, οπότε από την $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$ έπεται ότι

$$\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)-(0,0)\| < \delta = \varepsilon.$$

Άρα οι συνθήκες του Θεωρήματος 6 ικανοποιούνται, οπότε επαληθεύσαμε το όριο. ▲

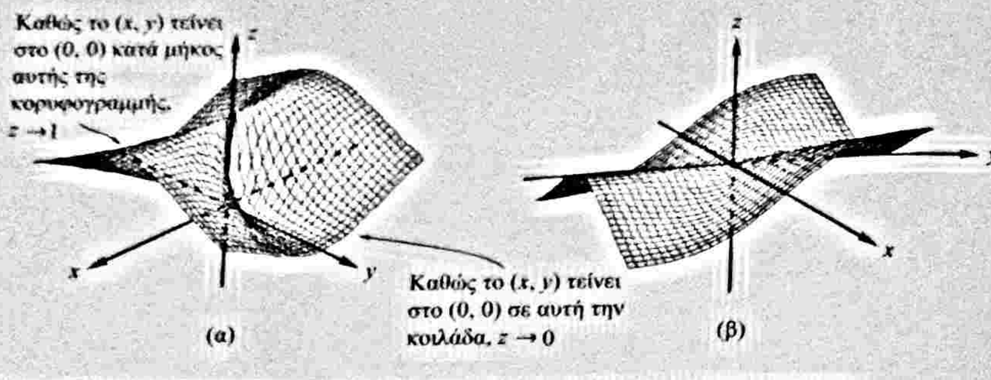
**Παράδειγμα 15** (α) Υπάρχει το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2/(x^2+y^2);$$

[Βλ. Σχήμα 2.2.18(α).]

(β) Αποδείξτε ότι [βλ. Σχήμα 2.2.18(β)]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$




Σχήμα 2.2.18 (α) Η συνάρτηση $z = x^2/(x^2 + y^2)$ δεν έχει όριο στο $(0, 0)$. (β) Η συνάρτηση $z = (2x^2y)/(x^2 + y^2)$ έχει όριο το 0 στο $(0, 0)$.

**Λύση** (α) Αν υπάρχει το όριο, το $x^2/(x^2 + y^2)$ θα πρέπει να τείνει σε κάποια συγκεκριμένη τιμή, φερ' ειπείν στο $a$, καθώς το $(x, y)$ πλησιάζει το $(0, 0)$. Ειδιότερα, αν το $(x, y)$ τείνει στο μηδέν κατά μήκος οποιασδήποτε δεδομένης διαδρομής, τότε το $x^2/(x^2 + y^2)$ θα πρέπει να τείνει στην οριακή τιμή $a$. Αν το $(x, y)$ τείνει στο $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y = 0$, η οριακή τιμή είναι προφανώς 1 (απλά θέτουμε $y = 0$ στην προηγούμενη έκφραση και παίρνουμε $x^2/x^2 = 1$). Αν το $(x, y)$ τείνει στο $(0, 0)$ κατά μήκος της ευθείας $x = 0$, η οριακή τιμή είναι

$$\lim_{y\to 0} \frac{0^2}{0^2 + y^2} = 0 \neq 1.$$

Άρα το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2/(x^2 + y^2)$ δεν υπάρχει.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{2x^2y}{x^2}\right| = 2|y|.$$

Άρα, για δεδομένο $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/2$, οπότε από την $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ έπεται ότι $|y| < \delta$. Επομένως,

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2 + y^2} - 0\right| < 2\delta = \varepsilon.$$

▲

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\varepsilon$-$\delta$, καταλήγουμε στην ακόλουθη αναδιατύπωση του ορισμού της συνέχειας.

**Θεώρημα 7** Έστω ότι δίνεται η $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε για

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{και} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \text{να ισχύει} \quad \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Η απόδειξη είναι σχεδόν άμεση. Προσέξτε ότι στο Θεώρημα 6 επιμείναμε να έχουμε $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$, δηλαδή $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Εδώ *δεν* επιβάλλεται αυτός ο περιορισμός· πράγματι, το συμπέρασμα του Θεωρήματος 7 είναι προφανώς σωστό όταν $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ και δεν υπάρχει λόγος να αποκλείσουμε αυτή την περίπτωση. Εδώ μας ενδιαφέρει η τιμή της $f$ στο $\mathbf{x}_0$· θέλουμε η $f$ στα γειτονικά σημεία να είναι κοντά σε *αυτή* την τιμή.

## Ασκήσεις

*Στις ασκήσεις που ακολουθούν μπορείτε να θεωρήσετε ότι η εκθετική συνάρτηση, το ημίτονο και το συνημίτονο είναι συνεχείς συναρτήσεις και μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ελεύθερα τεχνικές από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, όπως τον κανόνα του L'Hôpital.*

**1.** Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και υποθέστε ότι $\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = 5$. Τι μπορείτε να πείτε για την τιμή $f(1,3)$;

**2.** Έστω ότι η $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και υποθέστε ότι $\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = 5$. Τι μπορείτε να πείτε για την τιμή $f(1,3)$;

**3.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

(α) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^3 y$

(β) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

(γ) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$

**4.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

(α) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^x y$

(β) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

(γ) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

**5.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

(α) $\displaystyle\lim_{x\to 3} (x^2 - 3x + 5)$

(β) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin x$

(γ) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

**6.** Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε το όριο της $f$ καθώς $(x,y) \to (0,0)$ κατά μήκος της διαδρομής $x = 0$.

(β) Υπολογίστε το όριο της $f$ καθώς $(x,y) \to (0,0)$ κατά μήκος της διαδρομής $x = y^3$.

(γ) Δείξτε ότι η $f$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

**7.** Έστω $f(x,y,z) = \dfrac{e^{x+y}}{1+z^2}$. Υπολογίστε το $\lim_{h\to 0} \frac{f(1,2+h,3) - f(1,2,3)}{h}$.

**8.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν:

(α) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$

(β) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y}$

(γ) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$

**9.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν:

(α) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{y}$

(β) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 y^2}$

(γ) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2}$

**10.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν:

(α) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$

(β) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x - 1 - (x^2/2)}{x^4 + y^4}$

(γ) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2 + y^2}$

**11.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν:

(α) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$

(β) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{xyz}$

(γ) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$, όπου $f(x,y,z) = (x^2 + 3y^2)/(x+1)$

**12.** Υπολογίστε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν:

(α) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3}$

(β) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin 2x - 2x + y}{x^3 + y}$

(γ) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x^2 y \cos z}{x^2 + y^2}$

**13.** Υπολογίστε το $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, αν υπάρχει, στις εξής περιπτώσεις:

(α) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, $x_0 = 1$

(β) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, για οποιοδήποτε $\mathbf{x}_0$

(γ) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x^2, e^x)$, $x_0 = 1$

(δ) $f: \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (\sin(x-y), e^{x(y+1)} - x - 1)/\|(x,y)\|$, $\mathbf{x}_0 = (0,0)$

**14.** Έστω $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$. Περιγράψτε γεωμετρικά το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ στο οποίο η $f$ δεν είναι συνεχής.

**15.** Πού είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$;

**16.** Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(α) Θεωρώντας την $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως γραμμική απεικόνιση, γράψτε τις συνιστώσες συναρτήσεις της $A$.

(β) Δείξτε ότι η $A$ είναι συνεχής σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^2$.

**17.** Βρείτε το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2 + 3y^2)\log(x^2+y^2)$.
(Υποδειξη: Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες.)

*Δείξτε ότι τα υποσύνολα του επιπέδου στις Ασκήσεις 18–21 είναι ανοιχτά:*

**18.** $A = \{(x,y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$

**19.** $B = \{(x,y) \mid y > 0\}$

**20.** $C = \{(x,y) \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}$

**21.** $D = \{(x,y) \mid x \neq 0$ και $y \neq 0\}$

**22.** Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος $D_1(0,0)$ στον οποίο έχει προστεθεί το σημείο $\mathbf{x}_0 = (1,0)$, και έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$ η σταθερή συνάρτηση $f(\mathbf{x}) = 1$. Δείξτε ότι $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 1$.

**23.** Αν οι $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς, δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$f^2g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto [f(\mathbf{x})]^2 g(\mathbf{x})$$

και

$$f^2 + g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto [f(\mathbf{x})]^2 + g(\mathbf{x})$$

είναι συνεχείς.

**24.** (α) Δείξτε ότι η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1-x)^8 + \cos(1+x^3)$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2e^x/(2 - \sin x)$ είναι συνεχής.

**25.** (α) Μπορούμε να ορίσουμε κατάλληλα την $[\sin(x+y)]/(x+y)$ στο $(0,0)$ ώστε να γίνει συνεχής;

(β) Μπορούμε να ορίσουμε κατάλληλα την $xy/(x^2+y^2)$ στο $(0,0)$ ώστε να γίνει συνεχής;

(γ) Αποδείξτε ότι η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto ye^x + \sin x + (xy)^4$ είναι συνεχής.

**26.** Χρησιμοποιώντας είτε $\varepsilon$ και $\delta$ είτε σφαιρικές συντεταγμένες, δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

**27.** Χρησιμοποιώντας τον $\varepsilon$-$\delta$ ορισμό του ορίου, αποδείξτε ότι $x^2 \to 4$ καθώς $x \to 2$. Δώστε μια άλλη απόδειξη χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.

**28.** (α) Αποδείξτε ότι για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $s < t$, $D_s(\mathbf{x}) \subset D_t(\mathbf{x})$.

(β) Αποδείξτε ότι αν τα $U$ και $V$ είναι γειτονιές του $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, το ίδιο ισχύει για τα $U \cap V$ και $U \cup V$.

(γ) Αποδείξτε ότι τα συνοριακά σημεία ενός ανοιχτού διαστήματος $(a,b) \subset \mathbb{R}$ είναι τα σημεία $a$ και $b$.

**29.** Υποθέστε ότι τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ανήκουν στον $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbf{x}) = 1$, $f(\mathbf{y}) = 0$ και $0 \leq f(\mathbf{z}) \leq 1$ για κάθε $\mathbf{z}$ στον $\mathbb{R}^n$.

**30.** Έστω ότι δίνεται η $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και έστω $\mathbf{x}_0$ ένα συνοριακό σημείο του $A$. Λέμε ότι $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty$ αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ και $\mathbf{x} \in A$ να ισχύει $f(\mathbf{x}) > N$.

(α) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to1} (x-1)^{-2} = \infty$.

(β) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to0} 1/|x| = \infty$. Ισχύει ότι $\lim_{x\to0} 1/x = \infty$;

(γ) Αποδείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1/(x^2+y^2) = \infty$.

**31.** Έστω $b \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R}\backslash\{b\} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Γράφουμε $\lim_{x\to b-} f(x) = L$ και λέμε ότι το $L$ είναι το ***από αριστερά όριο*** της $f$ στο $b$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x < b$ και $0 < |x - b| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(α) Διατυπώστε τον ορισμό του ***από δεξιά ορίου***, δηλαδή του $\lim_{x\to b+} f(x)$.

(β) Βρείτε τα $\lim_{x\to0-} 1/(1+e^{1/x})$ και $\lim_{x\to0+} 1/(1+e^{1/x})$.

(γ) Σχεδιάστε το γράφημα της $1/(1+e^{1/x})$.

**32.** Δείξτε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ αν και μόνο αν

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| = 0.$$

**33.** Έστω ότι η $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί την $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ για κάθε $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ στο $A$, για κάποιες σταθερές $K$ και $\alpha$. Δείξτε ότι η $f$ είναι συνεχής. (Αυτού του είδους οι συναρτήσεις καλούνται ***συνεχείς κατά Hölder*** ή, αν $\alpha = 1$, ***συνεχείς κατά Lipschitz***.)

**34.** Δείξτε ότι η $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής παντού αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτή,

$$\text{όπου, αν} \quad U \subset \mathbb{R}^m, \quad f^{-1}(u) = \{x \mid f(x) \epsilon\, u\}$$

**35.** (α) Βρείτε έναν συγκεκριμένο αριθμό $\delta > 0$ για τον οποίο αν $|a| < \delta$, τότε $|a^3 + 3a^2 + a| < 1/100$.

(β) Βρείτε έναν συγκεκριμένο αριθμό $\delta > 0$ για τον οποίο αν $x^2 + y^2 < \delta^2$, τότε

$$|x^2 + y^2 + 3xy + 180xy^5| < 1/10.000.$$